PETER STROHMAYER

Hyperbolische Beschleunigung

Ein gleichförmig beschleunigter Materiepunkt gelangt in infinitesimalen Schritten jeweils von einem langsameren Inertialsystem zu einem von der Lorentz-Transformation (L-T) bestimmten Ereignisort des nächstschnelleren Inertialsystems. Er springt sozusagen von einer synchronisierten Uhr des vorhergehenden Systems zu der vorbeikommenden, zeitlich weiter vorangeschrittenen Begegnungsuhr des schnelleren Zielsystems. Auf den instantan zu denkenden Sprung des Materiepunkts in das betreffende Zielsystem folgt ein (infinitesimaler) Zeitraum, in dem er aus Sicht des Zielsystems ruht. Das Verhältnis der Geschwindigkeitsdifferenz zur Dauer dieses Zeitraums ist das Maß der Beschleunigung. Während dieses infinitesimalen Zeitraums des Verweilens hat sich die spätere Begegnungsuhr des nächsten Zielsystems von der gemeinsamen Ursprungsdeckung aller Zielsystems wegbewegt, sodass die Zeit der Begegnungsuhr des nächsten Zielsystems gegenüber der Uhr des vorhergehenden Zielsystems bereits weiter fortgeschritten ist. Sodann folgt die nächste Geschwindigkeitserhöhung samt nachfolgendem Zeitraum usw.

Der Materiepunkt bleibt bei seinen Sprüngen in seiner Eigenzeit (der Summe der infinitesimalen Zeiträume aus Sicht des jeweils erreichten Zielsystems, in dem er verweilt), er nimmt sozusagen seine eigene Uhr mit, deren Gang von der Beschleunigung nicht beeinflusst wird. Die Uhren der jeweiligen Zielsysteme sind mit zunehmender Dauer der Beschleunigung in immer größerem Ausmaß vorangeschritten als seine eigene. Das gilt auch im Vergleich zu den Uhren des Ausgangssystems, in das man das Ereignis des Ankommens des Beschleunigten aus Sicht des jeweils zuletzt erreichten Zielsystems mittels Lorentz-Transformation zurücktransformiert. Die Zwischenereignisse am Ende der jeweiligen infinitesimalen Zeiträume im erreichten Geschwindigkeitsniveau des Zielsystems werden mit Lorentz-Transformationen in das Ausgangssystem A zurücktransformiert, wo sie -

im Rahmen einer Iteration sämtlicher Beschleunigungssprünge - zusammen die Weltlinie der Beschleunigung aus Sicht A ausmachen. Somit ist der Beschleunigte im Vergleich zu einem Beobachter des Ausgangssystems zunehmend jünger.

Gleiche Beschleunigungsschritte (gleiche Erhöhungsschritte der Rapidität, siehe den Aufsatz Relationale Symmetrie des Lichts - RSL) und gleiche Beschleunigungszeitspannen aus Sicht des beschleunigten Materiepunkts bedeuten gleichförmige Beschleunigung. Die gleichbleibenden infinitesimalen "senkrechten" Weltlinienabschnitte der Beschleunigungsphasen aus Sicht der einzelnen Zielsysteme (Vergehen von Zeit, ohne aus Sicht des Zielsystems den Ort zu verändern) sind der Transmissionsriemen für eine Berechnung der Weltlinie der Beschleunigung und der Zeitersparnis beim Beschleunigten.

Mit der Wahl der gleichen Geschwindigkeitsstufen und der gleichen Beschleunigungsphase steht die Beschleunigung a fest (zB 0,1 c/1sec). Auf jeder Geschwindigkeitsstufe ist das Ereignis des Endes des immer gleichen Zeitraums z aus Sicht des Zielsystems (zB x=0, t=z=1) anhand der insgesamt erreichten Geschwindigkeit ins Ausgangssystem rückabzubilden (mit L-T zu transformieren). Das Ausmaß der einzelnen Wegabschnitte x_A und der einzelnen Zeitabschnitte t_A dieser Transformationen aus jeder Geschwindigkeitsstufe aus Sicht des Ausgangssystems A sind dort jeweils zum bisher erreichten Koordinatenwert hinzuzuzählen und ergeben die Koordinaten des neuen Ereignisses (des Standorts des Materiepunkts). In jeder Geschwindigkeitsstufe vergeht aus Sicht des Beschleunigten die gleiche Zeitspanne z (zB "1"). Die gesamte Eigenzeit des Beschleunigten t_B ist die Summe dieser Zeitspannen z. Die Zeit t_A aus Sicht des Ausgangssystems A ist entsprechend der Summe aller Transformationen dieser Zeitspannen weiter vorangeschritten.

Bezogen auf den stets gleichen Abschnitt auf der senkrechten (zeitlichen) Komponente einer Weltlinie aus Sicht des jeweiligen Zielsystems mit der zeitlichen Länge "z" vereinfacht sich die L-T. Aus der Sicht des Ausgangssystems ist t_{AS} das Zeitsegment und x_{AS} das Wegsegment (beide von v des jeweiligen Zielsystems abhängig), das bei einer Beschleunigungsphase t_B=z bis zum nächsten Ereignispunkt jeweils dazukommt:

t_{AS}=z/sqr(1-v^2)

x_{AS}=v*z/sqr(1-v^2)

<u>Iteration der Zeitsegmente</u>:

n = Nummer des gerade absolvierten Beschleunigungsschritts

x = Zahl der insgesamt absolvierten Beschleunigungsschritte

t_B = z*n (Zeit des Beschleunigten; Eigenzeit)

v = tanh(a*t_B) = tanh(a*z*n)

t_{AS} = z/sqr(1-(tanh(a*z*n))^2)

Die insgesamt vergangene Zeit aus Sicht A **t_A** = Summe t_{AS} = z/sqr(1-(tanh(a*z*1))^2) + z/sqr(1-(tanh(a*z*2))^2) + ... + z/sqr(1-(tanh(a*z*n))^2).

$$tA=\sum_{n=1}^{x} \frac{z}{\sqrt{\left(1\text{-}(\tanh(a\cdot z\cdot n))^2\right)}} \;;\; a=0{,}1;\; z=1$$

<u>Iteration der Wegsegmente</u>:

x_{AS} = z*tanh(a*z*n)/sqr(1-(tanh(a*z*n))^2)

Der insgesamt zurückgelegte Weg aus Sicht A **x_A** = Summe x_{AS} = z*tanh(a*z*1)/sqr(1-(tanh(a*z*1))^2) + z*tanh(a*z*2)/sqr(1-(tanh(a*z*2))^2) + ... + z*tanh(a*z*n)/sqr(1-(tanh(a*z*n))^2).

$$xA=\sum_{n=1}^{x}\frac{z\cdot\tanh(a\cdot z\cdot n)}{\sqrt{\left(1-(\tanh(a\cdot z\cdot n))^2\right)}}\ ;\ a=0{,}1;\ z=1$$

Es ist zu erkennen, dass ein Wegsegment x_{As} aus Sicht des Systems A das Zeitsegment aus Sicht Z (t_{Bs}) mal der jeweils bei einer bestimmten Eigenzeit t_B erreichten Eigengeschwindigkeit V (= v*Gamma) ist.

Sowohl die Koordinatengeschwindigkeit v als auch die Eigengeschwindigkeit V sind aus der wechselseitigen Sicht beider Systeme gleich groß. Die Eigengeschwindigkeit V eines Materiepunktes ist die in im Ruhesystem des Beschleunigten Z vergangene Zeit ("eigene Zeit") dividiert durch den aus Sicht des Ausgangssystems A zurückgelegten Weg ("fremder Weg"), V=v/sqr(1-v^2) (siehe RSL).

V = tanh(a*t_B)/sqr(1-(tanh(a*t_B))^2)

bzw.

$$V=\frac{\tanh(a\cdot tB)}{\sqrt{\left(1-(\tanh(a\cdot tB))^2\right)}};\ a=0{,}1$$

Die Eigengeschwindigkeit V bildet die Brücke von der Zeit t_B des Beschleunigten zum Weg x_A und in weiterer Folge zu der Zeit t_A aus Sicht des Ausgangssystems.

Ermittlung der hyperbolischen Bewegungsgleichung:

Die Rechnung mit der Eigengeschwindigkeit V ermöglicht es, den aus Sicht des Systems A zurückgelegten Weg direkt aus der vergangenen Zeit aus Sicht des Beschleunigten zu ermitteln. Ausgehend von der jeweils erreichten

Eigengeschwindigkeit V=f(a,t_B) des Zielsystems Z wird der Gesamtweg x_A aus Sicht des Ausgangssystems A zu einer bestimmten Eigenzeit des Beschleunigten t_B ermittelt.

Der **Weg x_A** aus Sicht des Ausgangssystems **in Abhängigkeit von der Zeit des Beschleunigten t_B** ist das Integral über die jeweiligen infinitesimalen Zeitsegmente dt_B aus Sicht des Beschleunigten mal die Eigengeschwindigkeiten (was der obigen Iteration von x_A entspricht):

$$xA=\int_0^{tB} dtB\left(\frac{\tanh(a\cdot tB)}{\sqrt{(1\text{-}(\tanh(a\cdot tB))^2)}}\right);\ a=0{,}1$$

bzw. (https://www.integralrechner.de)

$$xA=\frac{\cosh(a\cdot tB)\text{-}1}{a};\ a=0{,}1$$

x_A=(cosh(a*t_B)-1)/a

Die Zeit t_A aus Sicht des Ausgangssystems in Abhängigkeit von der Zeit des Beschleunigten t_B ist die Integration der einzelnen infinitesimalen Zeitabschnitte t_B multipliziert mit dem der erreichten Geschwindigkeit entsprechenden Lorenzfaktor (was der obigen Iteration von t_A entspricht):

$$tA=\int_{0}^{tB} dtB\left(\frac{1}{\sqrt{(1\text{-}(\tanh(a\cdot tB))^2)}}\right)\text{ ; }a=0{,}1$$

bzw. (https://www.integralrechner.de)

$$tA=\frac{\sinh(a*tB)}{a}\text{; }a=0{,}1$$

$t_A=\sinh(a*t_B)/a$

Bei einer "Lichtgeschwindigkeit" von 299 792 458 m/s entspricht die mittlere Erdbeschleunigung g von 9,81 m/s^2 einer Beschleunigung von 0,00000003272 c/s. Wenn ich im gravitationsfreien Raum eine Beschleunigung in diesem Ausmaß vornehmen würde, bliebe ich nach dieser Formel pro Tag (t_B=86400 Sekunden) um ungefähr eine Zehntel Sekunde jünger als ein unbeschleunigter Beobachter.

Ich ermittle nun in Umkehrung dieser Formel die Zeit des Beschleunigten t_B in Abhängigkeit von der Zeit des Ausgangssystems t_A (http://rechen-fuchs.de/gleichungen-loesen-online/).

$$tB=\frac{(\operatorname{asinh}(a\cdot tA))}{a};\ a=0{,}1$$

t_B=(asinh(a*t_A))/a

Die Zeit des Beschleunigten t_B setze ich in die Geschwindigkeitsfunktion v=tanh(a*t_B)ein und erhalte die Geschwindigkeit v aus Sicht des Ausgangssystems in Abhängigkeit von der Zeit aus Sicht des Ausgangssystems t_A, wobei sich ein a herauskürzt:

$$v=\tanh(\operatorname{asinh}(a*tA));\ a=0{,}1$$

bzw. (https://www.integralrechner.de)

$$v=\frac{a\cdot tA}{\left(\sqrt{(a^2\cdot tA^2+1)}\right)};\ a=0{,}1$$

Die Integration über die Zeitsegmente dt_A mal v ergibt den Weg aus Sicht des Ausgangssystems x_A in Abhängigkeit von der Zeit aus Sicht des Ausgangssystems t_A:

$$xA=\int_0^{tA} dtA\left(\frac{a\cdot tA}{\sqrt{(a^2\cdot tA^2+1)}}\right)\ ;\ a=0.1$$

bzw. (https://www.integralrechner.de)

$$xA=\frac{\sqrt{(a^2\cdot tA^2+1)}-1}{a};\ a=0,1$$

x_A=((sqr(a^2*t_A^2+1))-1)/a

Das ist die gesuchte hyperbolische Weltlinie aus Sicht des Ausgangssystems bei einer gleichförmigen Beschleunigung aus Sicht des Beschleunigten.

Exkurs betreffend das Verhältnis zum raumzeitlichen Intervall:

Bei der Untersuchung der Bellschen Beschleunigung stieß ich zufällig auf folgenden Zusammenhang: Ein 10 vom Ursprung entferntes, mit a=0,1 beschleunigtes Raumschiff S hat zu jeder Ausgangszeit t_A aus Sicht jedes der in Frage kommenden Zielsysteme die Koordinaten 10/0 (bei einer Beschleunigung von a=0,2 käme es bei einem Ausgangsabstand von 5 zur gleichen Konstellation).

Der Zufall bestand darin, dass ich den Abstand der Raumschiffe mit 10 und damit unbewusst den Kehrwert der gewählten Beschleunigung a von 0,1 gewählt hatte. Das erbrachte aus der Sicht sämtlicher Zielsysteme das Resultat, dass sich das vordere (rechte) 10 entfernte Raumschiff, das aus Sicht des jeweiligen Systems schon früher mit der Beschleunigung begonnen hatte, zur Zeit t_Z=0 (bei Ursprungsdeckung) immer in der gleichen ursprünglichen Ruhentfernung von 10 vom Ursprung dieses Zielsystems befindet.

Ist also der räumliche Abstand des Raumschiffs vom Ursprung des Ausgangssystems so groß wie der Kehrwert der Eigenbeschleunigung, so beginnt die Weltlinie aus Sicht jedes der in Frage kommenden Z bei t_Z=0 (in der der Beschleunigung entsprechenden räumlichen Entfernung). Aus Sicht jedes Zielsystems ändern sich die Koordinaten des beschleunigten Materiepunkts praktisch nicht und scheinen beim Ausgangswert von 10/0 zu verharren. Der Materiepunkt springt gewissermaßen von einem Ort 10/0 in einem Z zum "gleichen" Ort 10/0 im nächsten Z. Das ist nicht dahin zu deuten, dass er "dort" statisch verweilen würde. Dies zeigen die Rücktransformationen der jeweiligen Standorte 10/0 (aus Sicht der jeweiligen Zielsysteme) in das Ausgangssystem. Umgekehrt deckt sich der "Weltpunkt" des definierten Ereignisses aus Sicht des Ausgangssystems A 10/0 nicht mit den "Weltpunkten" der Ereignisse aus Sicht der Z 10/0 (also wenn sich sämtliche A und Z in Ursprungsdeckung befinden). Vielmehr liegen die Transformationen von 10/0 aus Sicht des Ausgangssystems in die einzelnen übereinandergelegten Zielsysteme Z auf einer Hyperbel, die der hyperbolischen Weltlinie einer beschleunigten Bewegung gleicht.

Nach der pseudo-riemannschen Metrik, ausgedrückt in der Hyperbel x^2-t^2=s^2 , führt ein (raumartiges) raumzeitliches Intervall von s=10 zu einer Funktion,

$$x=\sqrt{s^2+tA^2};\ s=10$$

die sich mit der oben abgeleiteten Beschleunigungsformel für das 10 entfernte Raumschiff S deckt. Dieselbe Entsprechung der Beschleunigungshyperbel mit der

Metrik ergibt sich bei einem reinen räumlichen Abstand s=5 für eine Beschleunigung 0,2 usw.

Dieser Zusammenhang zwischen einer Beschleunigung und einem raumzeitlichen Intervall wird mit Blick auf einen raumartigen Abstand zwischen zwei Ereignissen etwas deutlicher. Jedem raumartigen raumzeitlichen Intervall kann die Referenzgeschwindigkeit v_R eines gesuchten Systems zugeordnet werden, aus dessen Sicht der Abstand des gewählten Ereignisses E vom Ursprung zu einem rein räumlichen wird. v_R ergibt sich aus dem Verhältnis von t/s (siehe RSL, S 40).

Man kann diesen, bei gleichförmigen Bewegungen bestehenden geometrischen Zusammenhang und den sich daraus ergebenden reinen räumlichen Abstand umdeuten in eine in diesem räumlichen Abstand vom Ursprung ausgehende beschleunigte Bewegung eines Materiepunkts, bei deren Beginn die Zeit t und damit auch die Referenzgeschwindigkeit v_R 0 ist. Wird im Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit unter steter Beachtung des Verhältnisses t/s und unter Konstanz des mit Wahl der reinen räumlichen Abstands definierten raumzeitlichen Abstands (nach den Regeln der Lorentz-Transformation) in Bewegungsrichtung nach links (-v) erhöht, erhalten wir ein mit der jeweils erreichten Geschwindigkeit -v bewegtes Zielsystem Z, aus dessen Sicht das Ereignis E mit den Koordinaten t und s als erreichte Position der Bewegung eines Materiepunktes interpretiert werden kann.

Die in dieses Zielsystem transformierte Position des Ausgangsereignisses (mit seiner aus Sicht des Ausgangssystems A zur Zeit 0 gegebenen reinen räumlichen Entfernung) wird als Weltpunkt eines Materiepunktes interpretiert, der sich aus Sicht der - mit Ursprungsdeckung übereinander gelegten - Zielsysteme Z in der in ihnen ausgewiesenen Zeitspanne t in die Gegenrichtung nach rechts mit der Geschwindigkeit +v zu diesem Weltpunkt bewegt hat. Aus Sicht der Z beginnt diese fiktive Bewegung des Materiepunkts bei der ursprünglichen reinen räumlichen Entfernung (aus Sicht A) zur Zeit t=0 und beschreibt eine Beschleunigungshyperbel als Weltlinie. Die Fiktion einer Bewegung aus Sicht aller übereinandergelegten Z stammt daher, **dass hier nicht die Materiepunkte, sondern die**

Koordinatensysteme Z_1 bis Z_n in die Gegenrichtung als beschleunigt gelten (mit den erreichten Geschwindigkeiten -v) und aus deren Sicht beurteilt wird, wo sich der aus Sicht A in der Entfernung 10 ruhende Materiepunkt aus Sicht dieser wechselnden Z, die insgesamt ein "**beschleunigtes Koordinatensystem**" bilden, befindet. Die Standorte des Ausgangsereignisses E aus Sicht aller Z werden gedanklich in einem System übereinandergelegt und zusammengefasst, woraus sich die Weltlinie einer beschleunigten Bewegung eines Materiepunktes ergibt.

Eine kontinuierliche Steigerung von t geht mit einer diskontinuierlichen Steigerung von -v einher. Bezieht man sich auf die um die um den Faktor Gamma (Lorentzfaktor) größere Eigengeschwindigkeit V, so steigen t und -V proportional an, was einer gleichförmigen Beschleunigung der Z entspricht. Die Änderungssegmente des Wegs x_{AS} und die Änderungssegmente der Zeit t_{AS} in Abhängigkeit von t_A entsprechen denjenigen, die auch durch die Iteration und später der Integration bei Bewegung eines beschleunigten Materiepunktes mit +v aus der Sicht eines ruhenden Ausgangssystems ermittelt wurden.

Damit verhalten sich das beschleunigte System Z zum ruhenden Materiepunkt wie ein beschleunigter Materiepunkt zum ruhenden Ausgangssystem. Dies mit dem Unterschied, dass der Effekt der Beschleunigung aus Sicht Z von einer ursprünglichen reinen räumlichen Entfernung abhängt und dem inversen dieser Entfernung entspricht. Geht die Entfernung gegen Null, wird die Beschleunigung immer größer. Allerdings wird auch deren Verlauf mathematisch immer extremer. Beim Abstand Null kommt auch bei noch so hoher Relativgeschwindigkeit des Z keine zeitliche Komponente mehr zu Stande. Der Materiepunkt hat eine unendlich hohe Beschleunigung, aber es vergeht keine Zeit mehr, wo sich diese in einem erreichten räumlichen Abstand manifestieren könnte. Bei Ausgangsabständen knapp über dem räumlichen Abstand Null verbraucht der Beschleunigungsvorgang fast keine Zeit. Erst knapp vor v=c schnellen die Zeit (und auch der Raum) gegen Unendlich.

Je größer der anfänglich gewählte reine räumliche Abstand ist, desto weniger kommt bezogen auf die von Null ansteigende Zeit t (aus Sicht der Z) an zurückgelegtem Weg s auf der x-Achse hinzu, was als eine entsprechend langsamere Beschleunigung der Z aufzufassen ist. Das führt zu dem Zusammenhang, dass bei Verwendung eines raumzeitlichen Intervalls als Abbild einer beschleunigten Bewegung das Maß der Beschleunigung mit dem Kehrwert des reinen räumlichen Abstands festgelegt werden kann.

Um mit der aus der Metrik abgeleiteten Funktion eine nicht in einer räumlichen Entfernung, sondern (mit einem Funktionsgraphen) eine vom Ursprung ausgehende beschleunigte Bewegung zu beschreiben, ist der ursprünglich gewählte räumliche Abstand vom Ursprung, also die inverse Beschleunigung 1/a, vom Wert x abzuziehen:

x_A=sqr(1/a^2+t_A^2)-1/a

$$xA=\sqrt{s^2+tA^2};\ s=10$$

Dies entspricht der oben abgeleiteten hyperbolischen Bewegungsgleichung

x_A=(sqr(a^2*t_A^2+1)/a)-1/a

$$xA=\frac{\sqrt{\left(a^2\cdot tA^2+1\right)}-1}{a};\ a=0{,}1$$

Die auf dem raumzeitlichen Intervall beruhende hyperbolische Bewegungsgleichung lautet:

$$xA=\sqrt{\frac{1}{a^2}+tA^2};\ a=0{,}1$$

bzw.

$$tA=\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-xA^2\right)};\ a=0{,}1$$

Der Ausdruck $1/a^2$ ist die dem raumzeitlichen Abstand entsprechende Konstante. Bei gleichförmiger Beschleunigung gilt das Verhältnis a=sqr(1/($x_A{}^2$-$t_A{}^2$).

***